OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ - BRĂILA, 22 februarie 2015
CLASA A XI-A - Soluții

1. a) Să se arate că există o infinitate de matrice $A\in M_2(\mathbb{Z})$ cu proprietatea $A^3=2A+I_2$, dar că doar două dintre ele au toate elementele numere naturale.

b) Să se arate că există o infinitate de matrice $A\in M_2(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})$ cu proprietatea $A^3=2A$.

Gabriel Daniilescu, Brăila

Soluție. $A^2-\text{tr}(A)\cdot A+\det(A)\cdot I_2=O_2\Leftrightarrow A^2=\text{tr}(A)\cdot A-\det(A)\cdot I_2\Rightarrow$

$\Rightarrow A^3=\text{tr}(A)\cdot A^2-\det(A)\cdot A=\text{tr}(A)\left[\text{tr}(A)\cdot A-\det(A)\cdot I_2\right]-\det(A)\cdot A=$

$=\left(\text{tr}(A)\right)^2\cdot A-\text{tr}(A)\cdot\det(A)\cdot I_2-\det(A)\cdot A=\left[\left(\text{tr}(A)\right)^2-\det(A)\right]\cdot A-\text{tr}(A)\cdot\det(A)\cdot I_2.$

a) Este suficient să găsim o infinitate de matrice $A\in M_2(\mathbb{Z})$ cu $\left(\text{tr}(A)\right)^2-\det(A)=2$ și

$\text{tr}(A)\cdot\det(A)=-1\Rightarrow\det(A)=-\dfrac{1}{\text{tr}(A)}\Rightarrow\left(\text{tr}(A)\right)^2+\dfrac{1}{\text{tr}(A)}=2\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\left(\text{tr}(A)\right)^3-2\text{tr}(A)+1=0\Leftrightarrow\left[\text{tr}(A)-1\right]\left[\text{tr}(A)+\text{tr}(A)-1\right]=0.$

Dar $A\in M_2(\mathbb{Z})\Rightarrow\text{tr}(A)\in\mathbb{Z}\Rightarrow\text{tr}(A)=1$ și $\det(A)=-1.$

Putem alege $A=\begin{pmatrix}a & 1\\ 1+a-a^2 & 1-a\end{pmatrix}$ cu $a\in\mathbb{Z}$ arbitrar.

Pentru a găsi toate matricele cu elemente numere naturale, din

$\left[\left(\text{tr}(A)\right)^2-\det(A)\right]\cdot A-\text{tr}(A)\cdot\det(A)\cdot I_2=2A+I_2\Rightarrow$

$\Rightarrow\left[\left(\text{tr}(A)\right)^2-\det(A)-2\right]\cdot A=\left[\text{tr}(A)\cdot\det(A)+1\right]\cdot I_2\Rightarrow A=\alpha I_2,$ sau

$\left(\text{tr}(A)\right)^2-\det(A)-2=\text{tr}(A)\cdot\det(A)+1=0.$

1. $A=\alpha I_2\Rightarrow A^3=\alpha^3 I_2\Rightarrow\alpha^3 I_2=2\alpha I_2+I_2\Leftrightarrow\alpha^3=2\alpha+1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\alpha^3-2\alpha-1=0\Leftrightarrow(\alpha+1)\left(\alpha^2-\alpha-1\right)=0\Rightarrow\alpha\notin\mathbb{N}.$

2. $\left(\text{tr}(A)\right)^2-\det(A)-2=0$ și $\text{tr}(A)\cdot\det(A)+1=0\Rightarrow\text{tr}(A)=1$ și $\det(A)=-1.$

Deci $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow a+d=1$ cu $a,d\in\mathbb{N} \Rightarrow (a,d)\in\{(1,0),(0,1)\} \Rightarrow ad=0 \Rightarrow bc=1$ cu $b,c\in\mathbb{N} \Rightarrow (b,c)\in\{(1,1)\} \Rightarrow A_1=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ și $A_2=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

b) Este suficient să găsim o infinitate de matrice $A\in M_2(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})$ cu $(\mathrm{tr}(A))^2-\det(A)=2$ și $\mathrm{tr}(A)\cdot\det(A)=0$. Putem găsi A cu $\det(A)=0$ și $\mathrm{tr}(A)=\sqrt{2}$, de exemplu $A=\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}-1}{2} & \sqrt{k} \\ \frac{1}{4\sqrt{k}} & \frac{\sqrt{2}-1}{2} \end{pmatrix}$, unde $k\in\mathbb{N}^*$ și nu este pătrat perfect.

2. Considerăm o matrice $A\in M_3(\mathbb{R})$ care are următoarele proprietăți:

(1) A și A^3 au pe diagonala principală elementele $-1,0,1$ în această ordine;

(2) A^2 are pe diagonala principală elementele $1,0,1$ în această ordine.

Demonstrați că A este singulară, dar are cel puțin un minor de ordin 2 nenul.

Cristi Săvescu, București

Soluție. Considerăm $P=X^3-\mathrm{tr}(A)X^2+\mathrm{tr}(A^*)X-\det(A)$ polinomul caracteristic al matricei *A*. Din condițiile din ipoteză deducem că A^k are pe diagonala principală elementele $(-1)^k$, 0^k, 1^k pentru $k=1,2,3$.

Cum $P(A)=O_3$ din relația Hamilton-Cayley, privind elementele de pe diagonală în această relație, deducem că $P(-1)=P(0)=P(1)=0$, adică $\det(A)=\mathrm{tr}(A)=0$ și deci $P=X^3+\mathrm{tr}(A^*)X$. Din $P(1)=P(-1)=0$ rezultă că $\mathrm{tr}(A^*)=-1$. Atunci $A^*\neq O_3$, de unde deducem că *A* are cel puțin un minor de ordin 2 nenul, altfel $A^*=O_3$.

3. Fie șirul $(x_n)_{n\geq 0}$ cu $x_0=1$, $x_1=\frac{1}{2}$ și $x_{n+2}=x_{n+1}\cdot x_n^2$, $\forall n\geq 0$. Aflați termenul general x_n al șirului și apoi calculați $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Alexandru Gabriel Mîrșanu, Iași

Soluție. Se arată mai întâi inductiv că $x_n > 0,\ \forall n \geq 0,$ apoi se logaritmează relația de recurență și se obține: $\ln x_{n+2} = \ln x_{n+1} + 2\ln x_n,\ \forall n \geq 0.$

Notăm $\ln x_n = y_n,\quad \forall n \geq 0 \Rightarrow y_{n+2} = y_{n+1} + 2y_n \Leftrightarrow y_{n+2} - y_{n+1} - 2y_n = 0,\quad \forall n \geq 0$ cu $y_0 = \ln 1 = 0$ și $y_1 = \ln\frac{1}{2} = -\ln 2.$ Ecuația caracteristică a șirului are soluțiile –1 și 2, deci $y_n = c_1 \cdot (-1)^n + c_2 \cdot 2^n,\ \forall n \geq 0.$ Pentru $n = 0$ și $n = 1,$ avem $c_1 + c_2 = 0$ și

$$-c_1 + 2c_2 = -\ln 2 \Rightarrow 3c_2 = -\ln 2 \Rightarrow c_2 = -\frac{1}{3}\ln 2 \Rightarrow c_1 = \frac{1}{3}\ln 2 \Rightarrow$$

$$y_n = \frac{1}{3}\left[(-1)^n - 2^n\right]\ln 2,\ \forall n \geq 0 \Leftrightarrow y_n = \frac{(-1)^n - 2^n}{3}\cdot\ln 2 \Leftrightarrow y_n = \ln 2^{\frac{(-1)^n - 2^n}{3}},\ \forall n \geq 0.$$

Dar $x_n = e^{y_n} \Rightarrow x_n = 2^{\frac{(-1)^n - 2^n}{3}},\ \forall n \geq 0$ și $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 2^{-\infty} = 0.$

4. Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{\operatorname{arctg} x} - \sqrt{\arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)}}{\sqrt[3]{1+\ln\left[x(2x-1)\right]} - \sqrt[3]{1+\ln\left(x^3-4x+4\right)}}.$

Iulian Danielescu, Brăila

Soluție. Amplificând cu conjugata obținem

$$\lim_{x\to 1}\left[\frac{\operatorname{arctg} x - \arccos\frac{\sqrt{2}}{2}x}{\sqrt{\operatorname{arctg} x} + \sqrt{\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}x}}\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\frac{\sqrt[3]{1+\ln\left[x(2x-1)\right]}^2 + \sqrt[3]{1+\ln\left[x(2x-1)\right]}\cdot\sqrt[3]{1+\ln\left(x^3-4x+4\right)} + \sqrt[3]{1+\ln\left(x^3-4x+4\right)}^2}{1+\ln\left[x(2x-1)\right]-1-\ln\left(x^3-4x+4\right)}\right] =$$

$$= \frac{3}{2\sqrt{\frac{\pi}{4}}}\cdot\lim_{x\to 1}\left[\frac{\operatorname{arctg} x - \arccos\frac{\sqrt{2}}{2}x}{\sin\left(\operatorname{arctg} x - \arccos\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)}\cdot\right.$$

$$\cdot \frac{\sin\left(\operatorname{arctg} x\right)\cos\left(\arccos\ \frac{\sqrt{2}}{2}x\right)-\cos\left(\operatorname{arctg} x\right)\sin\left(\arccos\ \frac{\sqrt{2}}{2}x\right)}{\ln\frac{2x^2-x}{x^3-4x+4}}\Bigg]=$$

$$=\frac{3}{\sqrt{\pi}}\cdot\lim_{x\to 1}\frac{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}x-\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\cdot\sqrt{1-\frac{2x^2}{4}}}{\frac{\ln\left(1+\frac{2x^2-x-x^3+4x-4}{x^3-4x+4}\right)}{\frac{-x^3+2x^2+3x-4}{x^3-4x+4}}\cdot\frac{-x^3+2x^2+3x-4}{x^3-4x+4}}=$$

$$=\frac{3}{\sqrt{\pi}}\cdot\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x^2-\sqrt{1-\frac{2x^2}{4}}\right)}{-x^3+2x^2+3x-4}=$$

$$=\frac{3}{2\sqrt{\pi}}\cdot\lim_{x\to 1}\frac{\frac{2x^4}{4}-1+\frac{2x^2}{4}}{(x-1)\left(-x^2+x+4\right)}=\frac{3}{8\sqrt{\pi}}\cdot\lim_{x\to 1}\frac{x^4+x^2-2}{2(x-1)}=$$

$$=\frac{3}{16\sqrt{\pi}}\cdot\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\left(x^3+x^2+2x+2\right)}{x-1}=\frac{3\cdot 6}{16\sqrt{\pi}}=\frac{9}{8\sqrt{\pi}}.$$